

نفسه، حال قاعدة محددة لمعرفة قاعدة الحلول لمعادلة تفاضلية إذا كانت المعادلة معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة وسنشرح ذلك بمعضلات قادمة.

كما، إذا كانت المعادلة التفاضلية الخطية الممثلة ذات معاملات متغيرة... لا يوجد قاعدة محددة كما يباد قاعدة الحلول لكن كما بد لنا من إيجاد الحلول لمعادلات تفاضلية خطية ذات معاملات متغيرة والسبيل إلى ذلك هو أن نجد عن بعض الحلول لهذه المعادلات وفق طرق التفتيش: إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية

أولاً: تكون الدالة $y_1 = x$ حل خاص لهذه المعادلة إذا وفقط إذا كان $P_1(x) + x P_0(x) = 0$ ثانياً: تكون الدالة $y_1 = x^2$ حل خاص للمعادلة إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{2!}{0!} P_2(x) + \frac{2!}{1!} x P_1(x) + \frac{2!}{2!} x^2 P_0(x) = 0$$

ثالثاً: بشكل عام تكون الدالة $y = x^k$ حلًا خاصًا إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{k!}{0!} P_k(x) + \frac{k!}{1!} x P_{k-1}(x) + \frac{k!}{2!} x^2 P_{k-2}(x) + \dots + \frac{k!}{k!} x^k P_0(x) = 0$$

رابعاً: تكون الدالة $y = e^{mx}$ حلًا خاصًا للمعادلة إذا وفقط إذا كان:

$$P_n(x) \cdot M^n + P_{n-1}(x) \cdot M^{n-1} + \dots + P_1(x) M + P_0(x) = 0$$

نوجد جذور هذه المعادلة بفعل قيم M التي تتعلق بالمتغير x ونأخذ قيم الناتجة.

حالات خاصة: إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

تكون الدالة $y = x$ حل خاص إذا وفقط إذا كان $p(x) + x p_0(x) = 0$

$k(k-1)x^{k-2} + kx^{k-1}p(x) + x^k p_0(x) = 0$ $y = x^k$

تكون الدالة $y = e^{mx}$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$$M^2 + p(x)M + q(x) = 0$$

تكون الدالة $y = \sin mx$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$$M p(x) \cos mx + (q(x) - m^2) \sin mx = 0$$

تكون الدالة $y = \cos mx$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$$-M p(x) \sin mx + (q(x) - m^2) \cos mx = 0$$

أمثلة: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x y''' - y'' - x y' + y = 0$$

كما بد لنا من معرفة حلين خاصين في إيجاد الحل العام.

تكون الدالة $y = x$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$$p_1(x) + x p_0(x) = 0$$

$$-x + x(1) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

تكون الدالة $y = x^2$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{2!}{0!} p_2(x) + \frac{2!}{1!} x p_1(x) + \frac{2!}{2!} x^2 p_0(x) = 0$$

$$2(-1) + 2x(-x) + x^2(1) = 0$$

ليست حلًا

$$-2 - 2x^2 + x^2 \neq 0$$

تكون الدالة $y = e^x$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$$x M^2 - M^2 - x M + 1 = 0$$

$$xM(M^2-1) - (M^2-1) = 0$$

$$(M^2-1)(xM-1) = 0$$

$$M = \frac{1}{x} \quad \text{أو} \quad xM - 1 = 0$$

وإذا $M^2 - 1 = 0$ $\Rightarrow M = 1$ و $M = -1$ \Rightarrow حلول خاصة للمعادلة المعطاة $y_1 = e^x$ و $y_2 = e^{-x}$ أي أن كل من y_1 و y_2 هما أن

$$W(x, e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} x & e^x & e^{-x} \\ 1 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} \neq 0$$

عندئذ الحل العام للمعادلة المعطاة يكون:

$$y_h = A_1 x + A_2 e^x + A_3 e^{-x}$$

إذا عطينا معادلة ذات معاملات متغيرة وطلب إيجاد الحل العام ولم نتمكن من إيجاد الحل الخاص كما نستخدم طرق تفقيش

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$$

نكون الدالة $y = x$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$$P_1(x) + xP_2(x) = 0$$

$$4x - 4x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{حل}$$

$$\text{أو } y = y_1 \int \frac{P_2(x)}{y_1^2} dx + c_2 \quad \text{أو } y = y_2 \int \frac{P_2(x)}{y_2^2} dx + c_2$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المعطاة وفق علاقة ليفيل يكون:

$$y_h = x \left[\int \frac{c_1 e^{-\frac{4x}{2x+1}}}{x^2} dx + c_2 \right]$$

ط 1:

$$\frac{2x+1}{x^2} \sqrt{4x} = \frac{2x+1}{x^2} \cdot 2\sqrt{x} = \frac{2(2x+1)\sqrt{x}}{x^2} = \frac{4\sqrt{x}(2x+1)}{x^2} = \frac{4(2x+1)}{x^{3/2}} = \frac{8x+4}{x^{3/2}} = 8x^{-1/2} + 4x^{-3/2}$$

$$\int \frac{4x}{2x+1} dx = \int 2 - \frac{2}{2x+1} dx = 2x - \ln(2x+1)$$

$$y_h = x \left[\int \frac{c_1 e^{-2x + \ln(2x+1)}}{x^2} dx + c_2 \right]$$

وبالتالي فإن:

$$y_h = x \left[c_1 \int \frac{(2x+1) \cdot e^{-2x}}{x^2} dx + c_2 \right] =$$

$$= x \left[2c_1 \int \frac{e^{-2x}}{x} + c_1 \int \frac{e^{-2x}}{x^2} dx + c_2 \right] \quad (*)$$

بالتجزئة

لنحسب قيمة التكامل: $\int \frac{e^{-2x}}{x^2} dx$

$$-2e^{-2x} dx = du$$

$$\leftarrow u = e^{-2x}$$

نفرض أن

$$-\frac{1}{x} = 2x$$

$$\leftarrow \frac{dx}{x^2} = du$$

$$I = u \cdot 2x - \int 2x du$$

$$I = -\frac{1}{x} \cdot e^{-2x} - \int -\frac{1}{x} (-2 \cdot e^{-2x}) dx = -\frac{e^{-2x}}{x} - 2 \int \frac{e^{-2x}}{x} dx$$

$$= x \left[2c_1 \left(-\frac{e^{-2x}}{x} + c_2 \right) \right]$$

نفرض أن

$$= c_0 \cdot e^{-2x} + c_2 x \quad ; \quad c_0 = -2c_1$$

ط: تكون الدالة $y = e^{Mx}$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$$(2x+1)M^2 + 4xM - 4 = 0$$

$$2xM^2 + 4xM + M^2 - 4 = 0$$

$$2xM(M+2) + (M+2)(M-2) = 0$$

$$(M+2)(2xM + M - 2) = 0$$

$$M = \frac{2}{2x+1} \quad \text{مرفوض}$$

إما:

وإذا $M = -2 \Rightarrow M+2 = 0$ أي أن الدالة $y_2 = e^{-2x}$ حل، وبأن:

$$W(x, e^{-2x}) = \begin{vmatrix} x & e^{-2x} \\ 1 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$y_h = A_1 x + A_2 \cdot e^{-2x}$$

* في بعض المراجع يطلب ما يلي إيجاد حل عام للمعادلة تفاضلية معطاة وبذلك نرى المعادلة المعارة الآتية: إذا علمت أن للمعادلة الخطية المتجانسة حلول خاصة على صورة كثيرات حدود. إيجاد الحل تتبع الخطوات:

1- نفرض: $y = x^n$ حيث n عدد حقيقي.

$$y = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1(x) + a_0$$

حيث a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ثوابت عددية.

2- نستق هذا الفرض عدد من المرات سيؤدي رتبة المعادلة المعطاة.

3- نفرض $y = x^n$ والمستق المعاداة التفاضلية المعطاة.

ملاحظة: نهتم فقط بالحد ذو الأس الأعلى في جميع الحدود ونصل بالباقي. نرتب الحدود وفق تناقص قوى x . - نظابق معامل الحدود ذو الأس الأعلى بالصفر.

• نصل على معادلة جبرية المتغير فيها n نوجد جذور هذه المعادلة جبرية نهتم فقط بالقيم الموجبة ونصل جميع القيم السالبة $n=1$ نفرض أن $y = \frac{1}{x}$.

• إذا كانت $n=1$ نفرض أن $y = x + A$ نستق هذا الفرض ونفرض في المعادلة التفاضلية المعطاة ونطابق لتحديد قيمة A .

• إذا $n=2$ نفرض أن $y = x^2 + px + c$ نستق ونفرض ونطابق فنصل بنتيجة المطابقة بمعادلتين ومجهولتين هما c و p بحلها نحصل قيمتين c و p .

• إذا كان $n=3$ نفرض أن $y = x^3 + px^2 + qx + c$ نستق ونفرض ونطابق فنصل بحل ثلاث معادلات بثلاث مجهولات A, B, c بحلها نحصل على قيم A, B, c .

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة: $6y'' + x^2y' - 6(1+x)y = 0$

أوجد الحل العام لهذه المعادلة $6y'' + x^2y' - 6(1+x)y = 0$ إذا علمت أن المعادلة المتجانسة المناظرة تملك حل خاص على صورة كثيرات حدود.

SUBJECT:

الكل! نفرض أن: $y = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = 0$

حيث a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ثوابت عددية حقيقية.
نشتق مرتين متتاليتين:

$$y' = n \cdot X^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \dots + 2a_2X + a_1$$

نضع بالمدى الأس الأول

$$y'' = n(n-1)X^{n-2} + \dots$$

نقوض y'' و y' بالمعادلة تفاضلية:

$$2n(n-1)X^n + \dots - 6nX^n + 6X^n = 0$$

$$(2n^2 - 8n + 6)X^n + \dots = 0$$

بالمطابقة نجد أن

$$2n^2 - 8n + 6 = 0 \Rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0$$

$$(n-1)(n-3) = 0$$

$$n=1 \quad \text{أو}$$

$$n=3 \quad \text{أو}$$

من أجل $n=1$ نفرض أن $y = x + B$

نشتق فنجد أن $y' = 1$ ، و $y'' = 0$ ومنه بالتقويض نجد أن:

$$-6(1+x) \cdot 1 + 6(x+B) = 0$$

$$-6 - 6x + 6x + 6B = 0$$

$$6B = 6 \Rightarrow B = 1$$

$$y_1 = x + 1 \quad \text{حل خاص}$$

من أجل $n=3$ نفرض أن $y = x^3 + Dx^2 + Cx + A$

$$y' = 3x^2 + 2Dx + C$$

$$y'' = 6x + 2D$$

$$(3x^3 + 2x^2)(6x + 2D) - 6(1+x)(3x^2 + 2Dx + C) + 6(x^3 + Dx^2 + Cx + A) = 0$$

$$18x^4 + 6Dx^3 + 12x^3 + 4Dx^2 - 18x^3 - 12Dx^2 - 6C - 18x^3 - 12Dx^2 - 6Cx + 6x^3 + 6Dx^2 + 6Cx + 6A = 0$$

$$-2Bx^2 - 6Dx - 6C + 6A = 0$$

$$\begin{cases} -2B = 0 \\ -6D = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 0$$

$$+6A - 6C = 0$$

لها عدد غير منتهى من
الحلول $A = C$

وبالتالي فإن:

$$y_2 = x^3 + Ax + A \quad A=0$$

وهذه فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة المتناظرة.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \Rightarrow C_1(x+1) + C_2(x^3 + A(x+1))$$

$$y_h = C_2(x+1) + C_3 x^3 \quad \text{إذ } C_2 = C_1 + A$$

$$y_1 = x+1; \quad y_2 = x^3$$

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx$$

هنا $w = x^3 + x^2 + x$

ملاحظة: إذا كان $n = -1$ أي الدالة $y = \frac{1}{x}$ ليست حلاً

يوجد الحل العام من أجل القيمة التالية أي من أجل $n = 2$ نوجد الحل y بعد ذلك
نستخدم إحدى الطرق الثلاثة:

$$1- y = y_1 \int u dx$$

$$2- y = y_1 \cdot 2^x$$

$$3- y_n = y_1 \left[\frac{\int C_1 \cdot e^{-\int p(x) dx}}{y_1^n} dx + C_2 \right]$$